

B 日程	数学	国際経済学部
------	----	--------

問題 1

$$(1) \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{7}-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$$

$$(2) \sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{11-2\sqrt{28}} = \sqrt{7}-\sqrt{4} = \sqrt{7}-2$$

問題 2

- (1) $a_{11} = S_{11} - S_{10}$ で求められる。 S_{11} と S_{10} をそれぞれ計算すると、
 $S_{11} = 2 \cdot (11)^2 - 60 \cdot 11 = -418$, $S_{10} = 2 \cdot (10)^2 - 60 \cdot 10 = -400$
 なので、 $a_{11} = S_{11} - S_{10} = -418 + 400 = -18$ となる。

- (2) 一般項 a_n は $a_n = S_n - S_{n-1}$ で求められる。ただし、 $a_1 = S_1$ である。
 $S_n = 2 \cdot n^2 - 60n$, $S_{n-1} = 2 \cdot (n-1)^2 - 60(n-1)$
 なので、 $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 62$ となる。これは、初項 $a_1 = -58$ 、公差 4 の等差数列であり、 $a_{15} = 60 - 62 = -2$ 、 $a_{16} = 64 - 62 = 2$ と、第 1 項から第 15 項までは負の値、第 16 項から第 30 項までは正の値を取る数列である。これより、平均値は、

$$\frac{1}{30} \sum_{n=1}^{30} |a_n| = \frac{1}{30} \left(\sum_{n=1}^{15} |a_n| + \sum_{n=16}^{30} a_n \right)$$

で計算できる。等差数列の和の公式より、それぞれ

$$\sum_{n=1}^{15} |a_n| = \frac{15}{2} (|a_1| + |a_{15}|) = \frac{15}{2} (58 + 2) = 450$$

$$\sum_{n=16}^{30} |a_n| = \frac{15}{2} (a_{16} + a_{30}) = \frac{15}{2} (2 + 58) = 450$$

であるので、

$$\frac{1}{30} \sum_{n=1}^{30} |a_n| = \frac{1}{30} \left(\sum_{n=1}^{15} |a_n| + \sum_{n=16}^{30} a_n \right) = \frac{1}{30} (450 + 450) = 30$$

となる。

問題 3

(1) $f'(x) = 12x^2 - 12(a+1)x + 12a = 12\{x^2 - (a+1)x + a\} = 12(x-a)(x-1)$ 。

$f(x)$ が極大値と極小値を持つための条件は、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つことである。 $f'(x) = 0$ とすると、 $x = 1, a$ 。よって求める条件は $a \neq 1$ 。

(判別式を使って $D > 0$ となる条件を求めてもよい)

(2) $a > 1$ と $a < 1$ で場合分けする。まず $a < 1$ のとき。

$f(x)$ の増減表は次のようになり、 $f(x)$ は $x = a$ で極大値 $f(a) = -2a^3 + 6a^2$ をとる。

x	...	a	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘		↗

したがって求める条件は、 $-2a^3 + 6a^2 = 8$ から、 $2(a+1)(a-2)^2 = 0$ となる。これより、 $a = 2, -1$ となるが、 $a < 1$ を満たすのは、 $a = -1$ である。

次に $a > 1$ のとき。 $f(x)$ の増減表は次のようになり、 $f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $f(1) = 6a - 2$ をとる。

x	...	1	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘		↗

したがって求める条件は、 $6a - 2 = 8$ から、 $6a = 10$ となる。これより、 $a = \frac{5}{3}$ となる。これは $a > 1$ を満たす。

以上から求める a の値は $a = -1, \frac{5}{3}$ である。