

A 日程	数学	国際経済学部
------	----	--------

問題 1

(1) $x = 0$ のとき、 $-7 \leq 0$ なので不等式は満たされる。

$x > 0$ のとき不等式 $x^2 + 2x - 7 \leq 0$ を満たす x の範囲は、 $0 < x \leq -1 + 2\sqrt{2}$ である。
 $x < 0$ のとき不等式 $x^2 - 2x - 7 \leq 0$ を満たす x の範囲は、 $1 - 2\sqrt{2} \leq x < 0$ である。
 以上より、 $1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -1 + 2\sqrt{2}$ となる。

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{15}}{6-5} = 3\sqrt{2} + \sqrt{15}$$

問題 2

$$(1) \bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 x_k = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 (ak + k) = 4a + 4$$

分散を S_x^2 とすると、

$$S_x^2 = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \times 28(a+1)^2 = 4(a+1)^2$$

したがって、標準偏差は、 $\sqrt{S_x^2} = S_x = 2(a+1)$

(2) $z_k = \frac{x_k - \bar{x}}{S_x}$ において、 $\bar{x} = 4a + 4$ 、 $S_x = 2(a+1)$ なので、

$$z_1 = -\frac{3}{2}, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{1}{2}, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = \frac{1}{2}, \quad z_6 = 1, \quad z_7 = \frac{3}{2}$$

となる。したがって、平均値 $\bar{z}$ と標準偏差 S_z は、

$$\bar{z} = \frac{1}{7} \left(-\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$S_z = \sqrt{S_z^2} = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 (z_k - \bar{z})^2} = \sqrt{\frac{1}{7} \times 7} = 1$$

(3)

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = m \\ S &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \bar{u})^2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - m)^2 = S^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k^2 - 2mu_k + m^2) = S^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 - 2m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + m^2 = S^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 - 2m^2 + m^2 = S^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 = S^2 + m^2 \\
\bar{v} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (au_k + b) = a \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + b = am + b = 0
\end{aligned}$$

これより、

$$am + b = 0 \Leftrightarrow b = -am$$

となる。

$$\begin{aligned}
S_v &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_k - \bar{v})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^2} = 1 \Leftrightarrow S_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1 \\
S_v^2 = 1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (au_k + b)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a^2 u_k^2 + 2abu_k + b^2) \\
&= a^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 + 2ab \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + b^2 \\
&= a^2 (S^2 + m^2) + 2abm + b^2 \\
&= a^2 S^2 + a^2 m^2 + 2am(-am) + (-am)^2 \\
&= a^2 S^2
\end{aligned}$$

よって、 $S_v^2 = 1 = a^2 S^2$ を得る。 $a > 0$ かつ $S \neq 0$ であるので、 $a = \frac{1}{S}$ である。これを $b = -am$ に代入して、 $b = -\frac{m}{S}$ を得る。

(別解)

$V_k = aU_k + b$ より平均値 $\bar{V} = a\bar{U} + b$ の関係がある。また、分散 $S_v^2 = a^2 S_u^2$ の関係がある。

$$\bar{U} = m, \quad S_u^2 = S^2, \quad \bar{V} = 0, \quad S_v^2 = 1$$

から上記の 2 式に代入すると、 $0 = am + b$, $1 = a^2 S^2$ となる。よって、

$$a = \frac{1}{S}, \quad b = -\frac{m}{S}$$

問題 3

$y = f(x) = x^3 - 9x$ の接線の傾きは、与式を微分して、

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 9$$

となる。 $x = a$ において、 $f'(a) = 3a^2 - 9$ が傾きとなる。点 $(a, a^3 - 9a)$ における接線の方程式は、

$$y - (a^3 - 9a) = (3a^2 - 9)(x - a) \Leftrightarrow y = (3a^2 - 9)x - 2a^3$$

となる。これが点 $(1, -4)$ を通るので、接線の方程式に代入して、整理すると、

$$2a^3 - 3a^2 + 5 = (a + 1)(2a^2 - 5a + 5) = 0$$

を得る。実数解の範囲では $a = -1$ のみがこの方程式の解である。したがって、接線は、 $y = -6x + 2$ である。

次に、接線と曲線 C の交点を求める。

$$-6x + 2 = x^3 - 9x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2 = 0$$

2つの線（グラフ）は、 $x = 2$ で交わり、 $x = -1$ で接している。これらから、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲で y 軸と曲線 C および直線 l で囲まれた面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (-6x + 2 - x^3 + 9x) dx = \int_0^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 = -\frac{16}{4} + \frac{12}{2} + 4 = 6 \end{aligned}$$